

3-Färbbarkeit

- Wir wissen bereits, dass in polynomieller Zeit entschieden werden kann, ob ein Graph 2-färbbar ist.
- Satz: Zu Entscheiden, ob ein Graph 3-färbbar ist, ist **NP-vollständig**.
 - ▶ Beweis: Reduktion von 3SAT (Tafel)
 - ▶ NP-Vollständigkeit gilt auch für **planare Graphen**
 - 4-Färbung kann immer effizient gefunden werden, 2-Färbung kann effizient gefunden werden sie existiert
- Korollar: Zu Entscheiden, ob ein Graph k -färbbar ist mit $k \geq 3$, ist NP-vollständig.
 - ▶ Beweis: Füge $k-3$ Knoten, die untereinander und mit allen bisherigen Knoten verbunden sind, in den Graphen ein

Perfekte Graphen

- Wir wissen, dass für alle Graphen $\chi(G) \geq \omega(G)$ gilt.
 - ▶ Wann ist $\omega(G)$ auch eine obere Schranke?
- Def.: Ein Graph G heißt **perfekt**, wenn für alle induzierten Teilgraphen G' von G $\omega(G') = \chi(G')$ gilt.
 - ▶ Beispiel: Bipartite Graphen
 - $\chi(G)=1 \Rightarrow \omega(G)=1$, $\chi(G)=2 \Rightarrow \omega(G)=2$
 - Jeder induzierte Teilgraph eines bipartiten Graphen ist ebenfalls bipartit
- Satz (Lovasz, 1972): Ein Graph ist genau dann perfekt, wenn sein Komplementgraph perfekt ist.
- Satz (Chudnovsky et al., 2002): Ein Graph G ist genau dann perfekt, wenn weder G noch $\overline{G}$ einen Kreis ungerader Länge mit mindestens 5 Knoten enthalten.

Chordale Graphen

- Def.: Ein Graph heißt **chordal** (oder trianguliert), wenn jeder induzierte Kreis die Länge 3 hat.
 - ▶ Jeder Kreis $(v_1, \dots, v_k)$ aus mindestens 4 Knoten besitzt eine **Sehne**, d.h. eine Kante, die zwei Knoten v_i und v_j mit $i < j$ und $j \neq i+1$ verbindet.
 - ▶ Wenn G chordal ist, dann ist auch jeder induzierte Teilgraph von G chordal.
- Def.: Ein Knoten v heißt **simplizial**, wenn $N(v)$ eine Clique ist.
- Satz (Dirac, 1961): Jeder chordale Graph enthält einen simplizialen Knoten.
 - ▶ Beweis: Tafel

Chordale Graphen sind perfekt

- Satz: Jeder chordale Graph ist perfekt.
 - ▶ Beweis: Wie bei bipartiten Graphen gilt, dass alle induzierten Teilgraphen eines chordalen Graphen ebenfalls chordal sind. Es genügt daher $\omega(G) = \chi(G)$ zu zeigen.
Induktion über $|V|$
 - ▶ Induktionsanfang $|V|=1$: trivial
 - ▶ Induktionsschritt:
 - Sei v ein simplicialer Knoten in G
 - $\{v\} \cup N(v)$ ist eine Clique, also gilt $|N(v)| \leq \omega(G) - 1$
 - Nach Induktionsannahme gilt $\chi(G-v) = \omega(G-v) \leq \omega(G)$
 - $G-v$ kann also mit $\omega(G)$ Farben gefärbt werden
 - Für $N(v)$ werden dabei höchstens $\omega(G) - 1$ Farben verwendet
 - Es steht also auf jeden Fall noch eine der $\omega(G)$ Farben für v zur Verfügung

Perfekte Eliminationsschemata

- Def.: Ein **perfektes Eliminationsschema** für einen Graphen $G=(V,E)$ ist eine Permutation $v_1, \dots, v_n$ aller Knoten in V , so dass v_i simplizial in $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ ist.
- Satz: Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er ein perfektes Eliminationsschema besitzt.
 - ▶ Beweis:
 - ▶ von link nach rechts
 - Induktion über $|V|$
 - ▶ von rechts nach links:
 - Sei K ein Kreis in G mit mehr als 3 Knoten und v_i der Knoten in K mit dem kleinsten Index im Eliminationsschema
 - Da v_i simplizial in $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ ist, muss es eine Kante zwischen den beiden Nachbarknoten von v_i im Kreis geben

Algorithmische Konsequenzen

- Perfekte Eliminationsschemata lassen sich in polynomieller Zeit finden.
 - ▶ Bei geschickter Implementierung sogar in Linearzeit
- Satz: In chordalen Graphen lassen sich **maximale Cliques** effizient finden.
 - ▶ Sei $v_1, \dots, v_n$ ein perfektes Eliminationsschema. Dann hat jede inklusions-maximale Clique die Form $C = \{v_i\} \cup (N(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\})$
 - ▶ Chordale Graphen besitzen höchstens $|V|$ inklusions-maximale Cliques.

Algorithmische Konsequenzen (2)

- Satz: In chordalen Graphen lassen sich **minimale Färbungen** effizient finden.
 - ▶ Färbe Knoten in umgekehrter Reihenfolge des perfekten Eliminationsschemas (mit $\omega(G)$ Farben)
 - ▶ v_i besitzt höchstens $\omega(G)-1$ Nachbarn in $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$, d.h. bei der Färbung von v_i wurden bisher höchstens $\omega(G)-1$ Farben verwendet
- Sowohl maximale Cliques als auch minimale Färbungen lassen sich in chordalen Graphen sogar in **linearer Zeit** bestimmen.
- Satz (Grötschel et al., 1988): In **perfekten Graphen** lassen sich minimale Färbungen, maximale Cliques und maximale unabhängige Mengen effizient finden.

Kantenfärbungen

- Def.: Eine **Kantenfärbung** eines Graphen $G=(V,E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c:E \rightarrow \{1, \dots, k\}$, so dass $c(e) \neq c(f)$ für alle $e, f \in E$ mit $e \cap f \neq \emptyset$.
 - ▶ Der **chromatische Index** $\chi'(G)$ eines Graphen G ist die minimale Anzahl von Farben, die für eine Kantenfärbung von G benötigt wird.
 - ▶ Offensichtlich gilt $\chi'(G) \geq \Delta(G)$
- Satz (Vizing, 1964): Für jeden Graphen gilt $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$
 - ▶ Der Beweis liefert einen Algorithmus zur Bestimmung einer $\Delta(G) + 1$ -Kantenfärbung
- Satz (Holyer, 1981): Zu Entscheiden, ob ein Graph $\Delta(G)$ -kantenfärbbar ist, ist **NP-vollständig**.